



TITLE:

モンテカルロシミュレーションに 於けるDecoupled Cell Methodの検 証

AUTHOR(S):

長谷部, 勝也

CITATION:

長谷部, 勝也. モンテカルロシミュレーションに於けるDecoupled Cell Methodの検証. 物性研究 1990, 54(1): 92-107

ISSUE DATE:

1990-04-20

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/93997>

RIGHT:

モンテカルロシミュレーションに於ける Decoupled Cell Method の検証

愛知大学 教養部 長谷部 勝也

(1990年3月8日受理)

第一節 問題の提起

本間重男¹⁾等は、一次元 XY モデルのモンテカルロシミュレーションを行った。厳密解の知られたこのモデルによって彼等の提唱する近似方法 Decoupled Cell Method (DCM) の有効性を確認することが目的である。

H を系のハミルトニアン、 β を温度の逆数とする。メトロポリスのアルゴリズムは現在の状態 $|S\rangle$ (規格化されている) から次のステップで実現するかも知れない状態 $|S'\rangle$ (同じく) への遷移確率を

$$\frac{\langle S' | \exp(-\beta H) | S \rangle}{\langle S | \exp(-\beta H) | S \rangle}$$

で与える。但しこの値が 1 を越える場合、遷移確率は単に 1 とされる。本間等は系の状態を表すのにサイト表示、即ち格子点毎のスピン状態 (アップ又はダウン) の直積、を採用した。 $|S'\rangle$ としては $|S\rangle$ の (確率的に選ばれた) ある格子点上のスピンの向きを逆転した状態を採る。系が大きいとき正確な遷移確率を計算することは困難なので彼らは次のような近似を採用した。まず逆転したスピンを中心にして左右に ν 箇 合計 $2\nu + 1$ 箇の部分系を切り出す。この系を支配するハミルトニアン H' は H から部分系外の相互作用を捨てたものである。 ν の値があまり大きくないならば H' は適正な計算時間内に対角化出来る。そうすれば H' に依る $|S\rangle$ から $|S'\rangle$ への遷移確率が計算でき、これを正しい遷移確率の近似とするのである。

全体から切り放された (Decoupled) 部分系 (Cell) において遷移確率が定まるとするのが DCM の仮説である。彼らは $\nu = 1, 3, 5, 6$ の場合を実行した。シミュレーションの結果は次の通り。高温 $\beta \rightarrow 0$ に於て厳密解を再現する。低温即ち β の増大とともに厳密解との一致は失われる。近似の破綻する β の値 β_c は大体 ν に比例するようである。

$$J\beta_c \approx \nu$$

ここで J はスピン-スピン相互作用の強さである。

$$H = -\frac{J}{2} \sum_i (\sigma_{i+1}^x \sigma_i^x + \sigma_{i+1}^y \sigma_i^y)$$

自明のことながら ν を大きくすれば近似の限界 β_c をより低温側に延長できる。しかし困難は指数的に増大する。例えば $\nu = 6, 2\nu + 1 = 13$ の場合で 6 スピンがアップ 7 スピンがダウンである状態の数は $\binom{13}{6} = 1716$ である。シュミレーションを 1 ステップ実行する度に最悪の場合 1716×1716 のマトリックスを対角化しなければならない。現在の計算機では、これ以上 ν を増すのは不可能に近い。次元数が増大すれば困難はこれに留まらない。DCM の仮説は理解できるにしても、もっと能率的な遷移確率の計算法が必要である。また $J\beta_c \approx \nu$ の意味は何であろうか？

第二節 遷移確率の計算

本間等は様々なケースについてシュミレーションを実行している。その中で本稿の説明に都合の良い例を引く。

$$H = -\frac{J}{2} \sum_{i=1}^N (\sigma_{i+1}^x \sigma_i^x + \sigma_{i+1}^y \sigma_i^y)$$

$$J > 0$$

として (外磁場 = 0 に於ける) 垂直帯磁率

$$\chi = \frac{\beta}{N} \langle (\sum_{i=1}^N \sigma_i^z)^2 \rangle \quad (1)$$

を求める問題である。ここで N は系の大きさであり、系は周期境界条件を満たすとする。

$$N + i = i$$

ヒルベルト空間のベースとして

$$\sigma_1^z \sigma_2^z \dots \sigma_N^z$$

の規格化された固有状態を採る。即ちベースは

$$|S\rangle = |++-+-\dots\rangle$$

長谷部 勝也

等の 2^N 個の集合で

$$\langle S|S \rangle = 1$$

を満たすものである。ここで (+) はスピニアップ (-) はスピンドアウンを表す。

本間 等とは違ってハミルトニアンを対角化することなく遷移確率を求めるを試みる。

$$\sigma_i^+ = \frac{1}{2}(\sigma_i^x + i\sigma_i^y)$$

$$\sigma_i^- = \frac{1}{2}(\sigma_i^x - i\sigma_i^y)$$

$$G = \sum_{i=1}^N (\sigma_{i+1}^+ \sigma_i^- + \sigma_{i+1}^- \sigma_i^+)$$

$$g = \beta J$$

によって

$$-\beta H = gG$$

と書かれる。 σ_i^+ (σ_i^-) は第 i 格子点にあるダウ (アッ) スピンを反転させるオペレーターである。故に G は隣あった逆向きのスピンの組があればそれを2つとも反転させるオペレーターである。例えば

$$G | ++ --- ++ \rangle = | +- + --- ++ \rangle + | ++ --- +- + \rangle$$

以下、アッスピン + を実在と見做し、ダウンスピン - を単なる背景 = 空白と見ることにする。この時 G は + 印を、若しその隣に空白 - が有れば、そこへ移動させるオペレーターである。+ が移動した跡には空白 - が残る。

さて N フェルミオン系

$$\{a_i, a_j^+\} = \delta_{ij}$$

$$i, j = 1, 2, \dots, N$$

$$a_i|0\rangle = 0$$

を導入し 格子点 $j = (j_1, j_2, \dots, j_l)$ のスピンのアップ、残りがダウンであるスピン系の状態 $|S: j\rangle$ にフェルミオン系の状態

$$|j\rangle = |j_1, j_2, \dots, j_l\rangle = a_{j_1}^+ a_{j_2}^+ \dots a_{j_l}^+ |0\rangle$$

を対応させる。今

$$G' = \sum_{i=1}^N (a_{i+1}^+ a_i + a_i^+ a_{i+1})$$

とする。 $|S: j\rangle$ に $|j\rangle$ が対応するならば $G|S: j\rangle$ に $G'|j\rangle$ が対応する。それは G' がフェルミオンを移動させるオペレーターであり、 G が + 印を移動させるオペレーターであることを見れば分かる。又

$$\langle S: j | S: j' \rangle = \langle j | j' \rangle$$

は明らかである。従ってスピン系 ($|S: j\rangle$ と G) の組 とフェルミオン系 ($|j\rangle$ と G') の組とは同一視して構わない。これからは G' を G と書き必要に応じてスピン系の問題をフェルミオン系の問題に翻訳して議論を進める。

次ぎのユニタリ変換によって G を対角化できる。

$$c_k = \frac{1}{N^{1/2}} \sum_{j=1}^N \exp(-i \frac{2\pi j k}{N}) a_j$$

$$a_j = \frac{1}{N^{1/2}} \sum_{k=1}^N \exp(i \frac{2\pi j k}{N}) c_k$$

$$\{c_k, c_q^+\} = \delta_{k,q}$$

$$c_k|0\rangle = 0$$

$$G = \sum G(k)n_k$$

$$G(k) = \exp(i\frac{2\pi k}{N}) + \exp(-i\frac{2\pi k}{N})$$

$$n_k = c_k^\dagger c_k$$

さて

$$|j\rangle = \frac{1}{N^{l/2}} \sum \exp(i\frac{2\pi}{N}k \cdot j) c_{k_1}^\dagger c_{k_2}^\dagger \dots c_{k_l}^\dagger |0\rangle$$

ここに \sum は各 k_i についての和であり、 $k \cdot j = \sum_{i=1}^l k_i j_i$ である。 G^n のうち $|j\rangle$ に作用する部分を抜き出せば

$$\sum \frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_l!} G(k_1)^{n_1} G(k_2)^{n_2} \dots G(k_l)^{n_l} n_{k_1} n_{k_2} \dots n_{k_l}$$

となる。 \sum は各 k_i の和、及び $n_1 + n_2 + \dots + n_l = n$ を満たす非負整数 n の和を表す。

$$\langle j|G^n|j\rangle = \sum \frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_l!} G(k_1)^{n_1} G(k_2)^{n_2} \dots G(k_l)^{n_l} \exp(i\frac{2\pi}{N}(k-p) \cdot j) X(p, k)$$

但し

$$X(p, k) = \langle 0|c_{p_1}\dots c_{p_l} c_{k_1}^\dagger \dots c_{k_l}^\dagger |0\rangle$$

に於て、最後の因子 $X(p, k)$ は $p = (p_1, p_2 \dots p_l)$ が $k = (k_1, k_2 \dots k_l)$ の置換

$$p = kP$$

の場合のみ $\text{Sign}(P) = \pm 1$ であり、それ以外は 0 である。故に

$$\langle j|G^n|j\rangle = \sum \text{Sign}(P) \frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_l!} G(k_1)^{n_1} G(k_2)^{n_2} \dots G(k_l)^{n_l} \exp(i\frac{2\pi}{N}k \cdot J)$$

$$= \sum \text{Sign}(P) \frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_l!} \binom{n_1}{\frac{n_1+L_1}{2}} \binom{n_2}{\frac{n_2+L_2}{2}} \dots \binom{n_l}{\frac{n_l+L_l}{2}}$$

ここで t を転置記号として $J = j(1-P)^t$ である。また上の式では次の三つのものの和が行なわれる。

1) 全ての置換 P

2) $n_1 + n_2 + \dots + n_l = n$ を満たす全ての非負整数 n_i

3) 次の性質を持つ全ての L_i

即ち $J = (J_1, J_2, \dots, J_l)$ を素に $L_i = J_i, J_i \pm N, J_i \pm 2N, \dots$ であって n_i と同じ偶奇性を持ち且つ $0 \leq L_i \leq n_i$ であるもの。

幾つかの L_i が現われるのは周期境界を採用したことによる。しかし以下では L_i の中で絶対値最小のものを選びそれ以外の効果を無視する近似を採用する。この L_i を改めて J_i と書く。 J_i の符号の正負は問題にならないので正符号を採用する。そうすると J_i は j_i が置換 P によって移動した（格子間隔を単位とする）距離である。（周期境界に注意；例えば $j_1 = 1, j_2 = N - 1$ とすると j_1 と j_2 の距離は 1 である。）

$$\langle j | G^n | j \rangle = \sum \text{Sign}(P) \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_l!} \binom{n_1}{\frac{n_1+J_1}{2}} \binom{n_2}{\frac{n_2+J_2}{2}} \dots \binom{n_l}{\frac{n_l+J_l}{2}}$$

$$\langle j | \exp(gG) | j \rangle = \sum \frac{g^n}{n!} \langle j | G^n | j \rangle$$

$$= \sum \text{Sign}(P) \sum_{n_1} g^{n_1} \left(\frac{n_1+J_1}{2}! \frac{n_1-J_1}{2}! \right)^{-1} \dots \sum_{n_l} g^{n_l} \left(\frac{n_l+J_l}{2}! \frac{n_l-J_l}{2}! \right)^{-1}$$

$$= \sum_P \text{Sign}(P) I_{J_1}(2g) I_{J_2}(2g) \dots I_{J_l}(2g)$$

n の和によって $n = n_1 + n_2 + \dots + n_l$ の制約が解除された結果 n_i の和が実行され、積因子として変形された第一種ベッセル関数 $I_\nu(x)$ が現われる。但し ν は非負整数 J_i であり、 x の値は $2g = 2\beta J$ である。

上の式は行列式の定義と一致する。即ち 2 点 j_m, j_n 間の距離を $|j_m - j_n|$ として m, n 要

$$X_{mn} = I_{|j_m - j_n|}(2g)$$

とする $l \times l$ 行列 X によって

$$\langle j | \exp(gG) | j \rangle = \det(X)$$

が結論である。

前節で例とした 13 スピンの部分系で 6 スピンがアップ 7 スピンがダウンの場合、本間等は 1716×1716 のマトリックスを対角化せねばならなかった。本節の方法では 6×6 のデターミナントを計算すれば良い。XY モデルであって σ^z を対角化するという限定によって画期的高能率を獲得したと言うべきである。

第三節 DCM (DECOUPLED CELL METHOD) の検証

FIG.(1) は幾つかの L に対する $I_L(2g)$ を示す。

FIG.(1)

L の値によって決まるある g までは $I_L(2g) \approx 0$ であり、それ以降急激に増大する。FIG.(2) は $I_L(2g) = 1$ となる g と L の関係を示す。

FIG.(2)

$L \approx 2.5g$ と見做して良いであろう。 g が与えられたとき、この L 以上離れた二格子点の相関は無視して構わないと考えよう。これが第一節で述べた $\nu \approx \beta_c J$ に対応することは特に説明を要しない。問題はファクター 2.5 のずれである。つまり $I_L(2g) \approx 1$ を相関の切れる境目とする考察は粗雑過ぎるということである。この点を解明するために次のような数値実験を行なう。 $|S\rangle$ として十分に長い一次元環状格子スピンが全てアップ (+) である状態をとる。 $|S'\rangle$ としてどれか一つのスピンの逆転してダウン (-) となった状態をとる。前節とは反対に (-) を実在 (+) を空

白と見做すことにより、

$$\langle S | \exp(gG) | S \rangle = 1$$

$$\langle S' | \exp(gG) | S' \rangle = I_0(2g)$$

が得られる。従って遷移確率は

$$Prob = \langle S' | \exp(gG) | S' \rangle / \langle S | \exp(gG) | S \rangle = I_0(2g)$$

である。DCM 仮説を検証するために次の状況を考える。即ち同じ一次元環状格子の連続した $2\nu + 1$ 個のスピンはアップ (+) だが残りはダウン (-) とした状態を $|S_\nu\rangle$ と表す。次に $|S_\nu\rangle$ のアップスピンの中央の一個だけが反転してダウン (-) となり、残り 2ν 個はアップのままに留まった状態を $|S'_\nu\rangle$ とする。ハミルトニアンは変更しない。(この点は 本間等の状況設定と違う) ここで

$$Prob' = \langle S'_\nu | \exp(gG) | S'_\nu \rangle / \langle S_\nu | \exp(gG) | S_\nu \rangle$$

がどれほど $Prob = I_0(2g)$ に近いかを検討する。問題意識は ν 以上離れた格子点上のスピン状態が注目するスピンの反転にどれだけ寄与するかにある。FIG.(3) は $Prob'$ が誤差 10 % で $Prob$ を近似する g と ν の関係を示す。

FIG.(3)

略 $g \approx \nu$ と見てよいであろう。即ち $J\beta_c \approx \nu$ の再現である。(曲線の下が近似の成立領域である。) FIG. (4) は $\nu = 10$ のところで $Prob'/Prob$ を g の変化に対して書いたものである。

FIG.(4)

興味深い点は $\langle S | \exp(gG) | S \rangle$ と $\langle S_\nu | \exp(gG) | S_\nu \rangle$ ($\langle S' | \exp(gG) | S' \rangle$ と $\langle S'_\nu | \exp(gG) | S'_\nu \rangle$) とはまったく異なる値 となるにもかかわらず、比は (妥当な g の範囲で)

正確な値を与えることである。その数値の一例を示す。 $\nu = 15$ $g = 6$ の場合

$$\langle S_\nu | \exp(gG) | S_\nu \rangle = 4.3112 \times 10^{15}$$

$$\langle S'_\nu | \exp(gG) | S'_\nu \rangle = 8.1693 \times 10^{19}$$

である。これらの値は

$$\langle S | \exp(gG) | S \rangle = 1$$

$$\langle S' | \exp(gG) | S' \rangle = I_0(2g) = 1.894893 \times 10^4$$

と全く異なっているが、その比

$$\langle S'_\nu | \exp(gG) | S'_\nu \rangle / \langle S_\nu | \exp(gG) | S_\nu \rangle = 1.894887 \times 10^4$$

は

$$\langle S' | \exp(gG) | S' \rangle / \langle S | \exp(gG) | S \rangle = I_0(2g) = 1.894893 \times 10^4$$

と驚くべき一致を示す。結論としてDCM仮説は支持されたと考えられる。

第4節 二三の補足

1) $\det(X)$ は $g = \beta J$ の偶関数である。

まず $I_L(2g)$ は L が偶数ならば g の偶関数、 L が奇数ならば g の奇関数である。さて $\det(X)$ は

$$I_{|j_a - j_b|} \times I_{|j_b - j_c|} \times \cdots \times I_{|j_z - j_a|}$$

を因子として含む幾つかの式の和である。この因子の偶奇性は

$$M = |j_a - j_b| + |j_b - j_c| + \cdots + |j_z - j_a|$$

の偶奇性と一致する。さて M は偶数である。なぜなら M は格子点

$$a, b, c, \dots, z$$

を一巡する（即ち a から出て a に帰る）距離と見做しうるからである。故に $\det(X)$ は g についての偶関数の積の和となり、それ自身偶関数である。このことは H のスペクトルが正負対称であることを意味する。

2) 二次元正方格子への拡張。

周期境界を持つ大きさ $N \times N$ の正方格子を問題にする。一個の格子点を $j = (j^x, j^y)$ と表示し、 l 個の格子点を $\mathbf{j} = (j_1, j_2, \dots, j_l)$ の様に表す。また $\langle i, j \rangle$ で二つの格子点 i, j が最隣接格子点であることを示す。ハミルトニアンは

$$H = -\frac{J}{2} \sum_{\langle i, j \rangle} (\sigma_i^x \sigma_j^x + \sigma_i^y \sigma_j^y)$$

である。第二節で G と書いたオペレータをここでは E と書くことにして

$$E = \sum_{\langle i, j \rangle} (a_i^\dagger a_j + a_j^\dagger a_i)$$

E の対角化は第二節の二次元版である次ぎのユニタリ変換による。

$$c_k = \frac{1}{N} \sum_j \exp(-i \frac{2\pi \mathbf{j} \cdot \mathbf{k}}{N}) a_j$$

$$\{c_k, c_q^\dagger\} = \delta_{k,q}$$

$$a_j = \frac{1}{N} \sum_k \exp(i \frac{2\pi \mathbf{j} \cdot \mathbf{k}}{N}) c_k$$

ここで

$$\mathbf{k} = (k^x, k^y)$$

$$k^x, k^y = 1, 2, \dots, N$$

$$\mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = j^x k^x + j^y k^y$$

であり、対角化は

$$E = \sum_k E(\mathbf{k}) n_k$$

$$n_k = c_k^\dagger c_k$$

$$E(k) = E(k^x, k^y) = G(k^x) + G(k^y)$$

と表される。第二節で定義されていたように

$$G(p) = \exp(i\frac{2\pi p}{N}) + \exp(-i\frac{2\pi p}{N})$$

である。さて

$$j = (j_1, j_2, \dots, j_l)$$

のスピンの + であり それ以外が - である状態を

$$|j\rangle$$

と表す。第二節の計算ルールは次のように拡張される。 $g = \beta J$ とし

$$X_{m,n} = I_L(2g)I_M(2g)$$

$$L = |j_m^x - j_n^x|$$

$$M = |j_m^y - j_n^y|$$

である $l \times l$ マトリックス X によって

$$\langle j | \exp(-\beta H) | j \rangle = \det(X)$$

である。以上を見て分かる通り高次元への拡張に対する障害はない。

3) 強い斥力を受けた半充填状態 (格子点数 = フェルミオン数) にある二次元正方格子上的ハバードモデルのスピンの系への翻訳

ハバードモデルとは次のような格子上的フェルミオン系のことである。

$$H = U H_0 + t H_1$$

$$H_0 = \sum_i n_{i\uparrow} n_{i\downarrow}$$

$$H_1 = \sum_{\langle i,j \rangle} (a_i^\dagger a_j + a_j^\dagger a_i)_\uparrow + \sum_{\langle i,j \rangle} (a_i^\dagger a_j + a_j^\dagger a_i)_\downarrow$$

$$U > 0$$

$$t > 0$$

ここで $\uparrow\downarrow$ はフェルミオンスピンのアップ、ダウンを表す。又 $n_{i\uparrow} = (a_i^\dagger a_i)_\uparrow$ 等である。

強い斥力 $U \gg t$ の場合、

$$H_{eff} = \frac{-t^2}{U} (H_1)^2$$

を H の有効ハミルトニアンとする近似が知られている。その場合 $(H_1)^2$ が作用するヒルベルト空間のベースとして、各格子点上にアップまたはダウンスピンのフェルミオンが必ず一個だけ存在する状態の全てを採る。これらのベースをギリシャ文字を使って

$$|\alpha\rangle, |\beta\rangle, \dots$$

と記す。二重占位（同一格子点上にアップとダウンスピンのフェルミオンが存在している）状態はベースから排除される。ベースに着目する限りスピン系と区別がつかない。この点を通じてスピン系への翻訳が可能となる。 $(H_1)^2$ のマトリックス要素を計算するのに中間状態として二重占位状態を一回だけ許すのがこの近似の特長である。このマトリックス要素の内、非対角成分は隣合った逆向きスピンの交換を惹起するもので、可能な中間状態が二種類（左のスピンの右に移動した後右のスピンの左に移動する場合とその鏡対称の移動の場合）あることに注意して、非対角要素について

$$(H_1)^2 \sim 2 \sum_{\langle i,j \rangle} (\sigma_i^+ \sigma_j^- + \sigma_j^+ \sigma_i^-) = \sum_{\langle i,j \rangle} (\sigma_i^x \sigma_j^x + \sigma_i^y \sigma_j^y)$$

ここで \sim はスピン系での対応物を表す。 $(H_1)^2$ の対角成分 $\langle \alpha | (H_1)^2 | \alpha \rangle$ は二重占位を一つだけ含む中間状態を経て元の状態へ戻る作用に対応し、その値は中間状態の数に等しい。そのよう

な中間状態の個数は $|\alpha\rangle$ の中にある逆スピン対（隣接格子点上のスピンが逆向きになっているもの）の数の二倍である。右のスピンが左へ移ってから右へ戻るか、またはその逆の運動が可能なので二倍となる。従って対角要素について

$$(H_1)^2 \sim \sum_{\langle i,j \rangle} (1 - \sigma_i^z \sigma_j^z)$$

と書けるが $\sum_{\langle i,j \rangle} (1)$ は単なる定数なので無視してよく結局

$$(H_1)^2 \sim \sum_{\langle i,j \rangle} (\sigma_i^x \sigma_j^x + \sigma_i^y \sigma_j^y - \sigma_i^z \sigma_j^z)$$

となって異方的ハイゼンベルグモデルに帰着する。

4) 酔歩の問題

第2節で現われた

$$\langle j | G^n | j \rangle = \sum_{j_1} \dots \sum_{j_{n-1}} \langle j | G | j_1 \rangle \langle j_1 | G | j_2 \rangle \dots \langle j_{n-1} | G | j \rangle$$

は次ぎのように解釈できる。即ち j の中の $+$ 印のどれかが隣の空白に移動して j_1 となる。次ぎに j_1 の中のどれかが移動して j_2 となる。... という動作を n 回繰り返した後で最初の j を実現する手順が和の各項に対応する。そうして $\langle j | G^n | j \rangle$ は相異なるそのような手順の総数に等しい。 $+$ 印が一つだけの場合は丁度 n 歩で出発点に戻る酔歩の総数を求める問題である。一般の場合は $+$ 印の数だけの人数による酔歩の問題であって総歩数（全員の歩数の和） n によって元の配置を再現する多人数酔歩の総数を求める問題となる。言うまでもないことだが二人以上が同時に同一場所を占めることはできない。計算の結果は

$$\sum \text{Sign}(P) \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_l!} \binom{n_1}{\frac{n_1+L_1}{2}} \binom{n_2}{\frac{n_2+L_2}{2}} \dots \binom{n_l}{\frac{n_l+L_l}{2}}$$

であった。

この表式は次のように理解できる。まず一人酔歩の問題としてある格子点を 出発して n 歩で L だけ離れた格子点に行き着く酔歩の数は

$$\binom{n}{\frac{n+L}{2}}$$

である。 l 人酔歩の問題としてお互いに重なり合っても構わないのであれば (ボース的酔歩) 総歩数 n によってもとの配置を再現する酔歩の総数は

$$\sum \frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_l!} \binom{n_1}{\frac{n_1+L_1}{2}} \binom{n_2}{\frac{n_2+L_2}{2}} \dots \binom{n_l}{\frac{n_l+L_l}{2}}$$

である。歩み終わった後、全体として最初の配置が再現されていけばよいのであるから \sum には l 人の位置のあらゆる置換についての和も含まれる。重なりを許さないのであれば (フェルミ的酔歩) $Sign(P)$ が因子として加わる。第2節では幾つかの L_i を絶対値最小のただ一つの J_i で近似した。その意味は境界を巡って来る酔歩を無視することである。

参考文献

1)

S.Homma, H.Matsuda, N.Ogita 物性研究 44 (1985) 795

S.Homma, H.Matsuda, N.Ogita Prog. Theor. Phys. 72 (1984) 1245

S.Homma, K.Sano, H.Matsuda, N.Ogita Prog. Theor. Phys. Suppl No. 87 (1986) 127

$I_L(2g)$

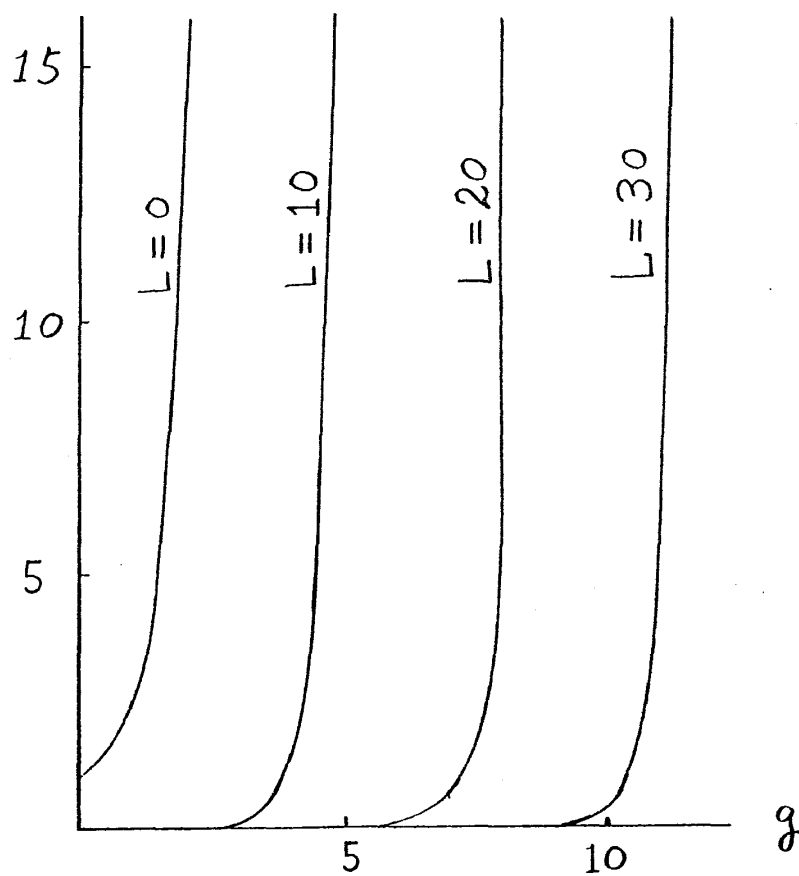


Fig. 1

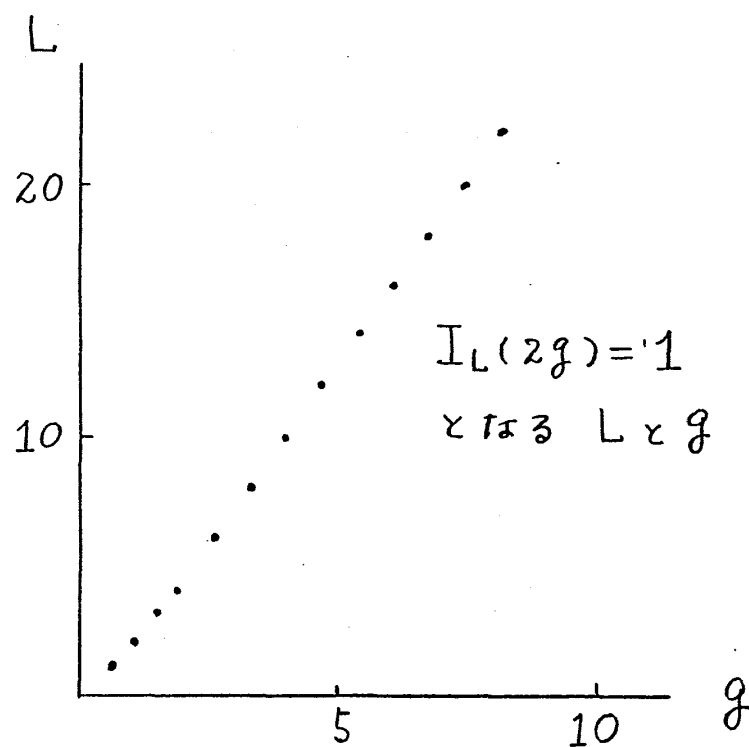


Fig. 2

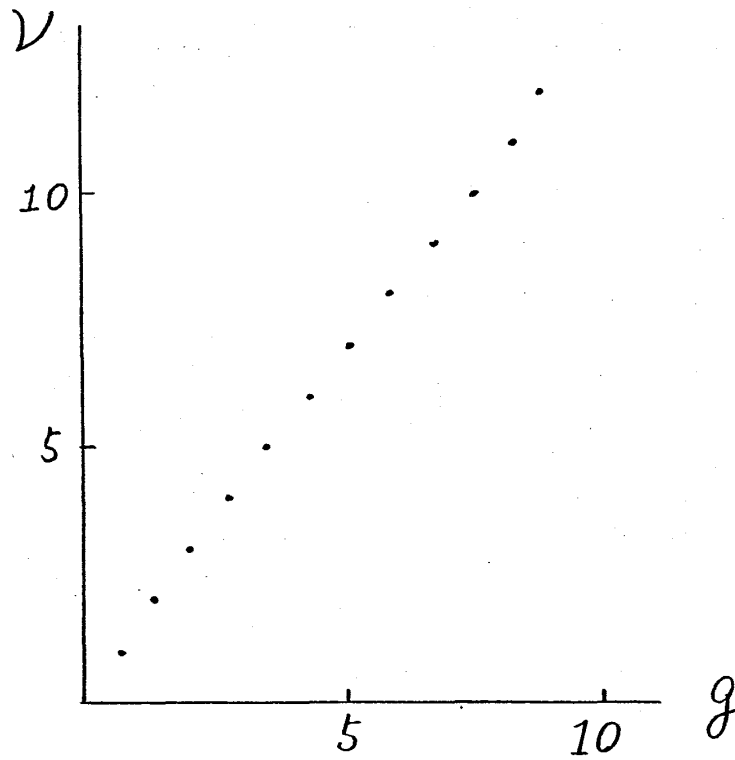


Fig. 3

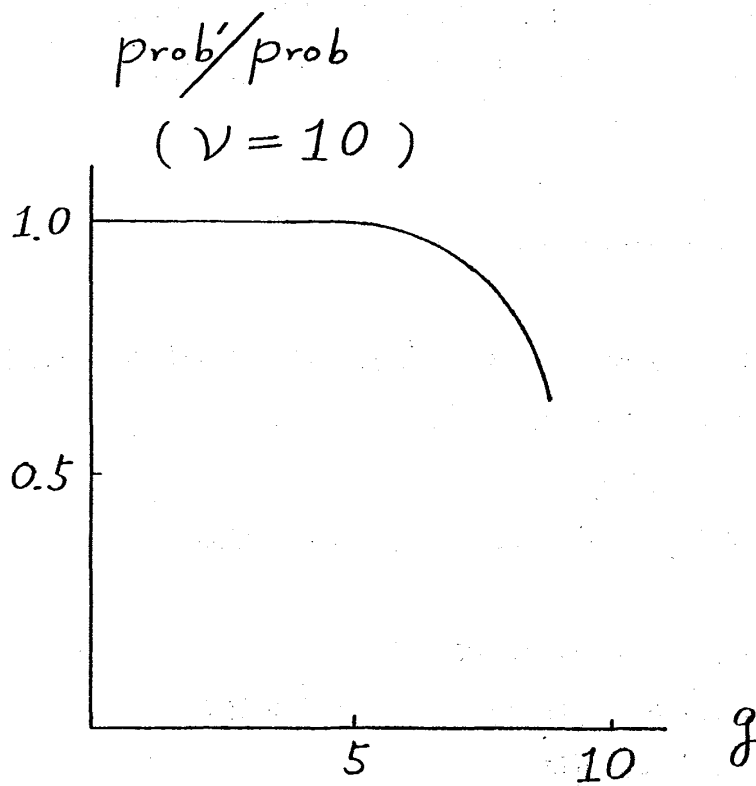


Fig. 4